Über die Stromrichtung in Nebenschliessungen zusammengesetzter Ketten.

Von **Dr. Adalbert Edlem von Waltenhofen,**
k. k. Professor der Physik an der Universität zu Innsbruck.

(Vorgelegt in der Sitzung vom 4. October 1860.)

In Daniell's Abhandlungen „*On voltaic combinations*“ findet sich die erste auf den Gegenstand der vorliegenden Mittheilung bezügliche Beobachtung.

Der genannte Physiker fand nämlich, dass die Richtung der abgeleiteten Ströme, welche er erhielt, indem er nach einander einzelne Elemente einer geschlossenen Säule mit Nebenschliessungen versah, nicht immer mit dem Hauptstrome übereinkam, sondern bald bei dieser, bald bei jener Zelle entgegengesetzt lief; ja, eine und dieselbe Zelle lieferte ihm einen Zweigstrom der einen oder der andern Richtung, je nachdem der Widerstand im Schliessungsbogen der Säule kleiner oder grösser war.

Übrigens liess Daniell diese Erscheinung unerklärt; die theoretische Beleuchtung derselben hat Poggendorff im 55. Bande seiner Annalen gegeben, und zwar auf Grundlage seiner Theorie der zusammengesetzten Ketten, mit welcher er bei Begründung der Compensationsmethode (1841) die Wissenschaft bereichert hatte.

Ohne in eine Wiederholung der citirten Abhandlung einzugehen, will ich aus derselben nur so viel entnehmen, um zu zeigen, in wie weit darin jene von Daniell beobachteten Erscheinungen erledigt sind, und inwiefern ich in diesem Aufsatze die Gesetze zu erweitern glaube, welche für die bei successiven Nebenschliessungen einzelner Elemente auftretenden Zweigströme allgemeine Geltung haben.

Denkt man sich n Elemente, welchen die elektromotorischen Kräfte

$$e_1 \;, e_2 \;, e_3 \;, \ldots . e_n$$

und die wesentlichen Widerstände

$$u_1 \;, u_2 \;, u_3 \;, \ldots . u_n$$

zukommen, durch Vereinigung der gleichnamigen Elektromotoren zu einem einzigen Elemente verbunden und dieses durch einen Leiter vom Widerstande l geschlossen, bezeichnet man ferner die Stromstärke in l mit L und setzt man der Kürze wegen

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \ldots + \frac{1}{u_n} = r,$$

so gilt nach **Poggendorff** die Gleichung

$$L = \frac{1}{rl}\left(\frac{e_1}{u_1} + \frac{e_2}{u_2} + \frac{e_3}{u_3} + \ldots + \frac{e_n}{u_n}\right)$$

Denkt man sich nun das erste Element in seiner Stellung umgekehrt, so dass es mit der elektromotorischen Kraft $-e_1$ in Rechnung kommt, alle übrigen $n-1$ Elemente aber, anstatt neben einander, hinter einander gereiht, zu einer Säule von der elektromotorischen Kraft

$$P_1 = e_2 + e_3 + \ldots + e_n$$

und vom Widerstande

$$Q_1 = u_2 + u_3 + \ldots + u_n,$$

so hat man eine geschlossene Säule von n Elementen, an welcher nunmehr der Leiter l als Nebenschliessung des ersten Elementes erscheint.

In dieser Nebenschliessung muss, wenn man

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{u_1} + \frac{1}{Q_1} = \frac{1}{R_1}$$

setzt, die Stromstärke

$$\lambda_1 = \frac{1}{R_1 l}\left(\frac{P_1}{Q_1} - \frac{e_1}{u_1}\right)$$

stattfinden, weil sich die beschriebene Anordnung so in obige Formel subsumiren lässt, dass man die aus $n-1$ Elementen bestehende Säule als ein einziges, mit den Constanten P_1 und Q_1 begabtes Element betrachtet.

Aus dieser Relation hat Poggendorff die Daniell'sche Erscheinung mit der Folgerung erklärt: dass der Strom in der besagten Nebenschliessung positiv (dem Hauptstrome gleichgerichtet) oder negativ oder Null sein kann, je nachdem

$$\frac{P_1}{Q_1} \text{ mit } \frac{e_1}{u_1}$$

verglichen grösser oder kleiner oder gleich ist, und dass sich also auch eine Umkehrung jenes Stromes durch entsprechende Änderung des Widerstandes Q_1 bewirken lässt.

Poggendorff macht hierauf das vielleicht im ersten Augenblicke Auffallende dieses letzteren Ergebnisses durch nähere Erwägung des Umstandes einleuchtend, dass die Unterschiede zwischen den Spannungen und Widerständen der einzelnen Elemente, somit auch zwischen

$$\frac{P_1}{Q_1} \text{ und } \frac{e_1}{u_1}$$

niemals sehr beträchtlich sind, sobald man es, wie beim Daniell-schen Versuch, mit Ketten gleicher Art zu thun hat; er hebt sodann hervor, dass es bezüglich der negativen und positiven Richtung des abgeleiteten Stromes darauf ankommt, ob die partiell geschlossene Kette für sich einen stärkeren oder schwächeren Strom liefern würde als die übrigen Ketten zusammen genommen, sowie das Nullsein des Stromes der Nebenschliessung dem Falle der Gleichheit dieser Kette mit dem Complex der übrigen entspricht; und bemerkt ferner, dass wenn sämmtliche Ketten der Batterie einander vollkommen gleich sind, natürlich keine derselben bei partieller Schliessung einen Strom liefern werde. So weit hat Poggendorff das Verhalten einer geschlossenen Säule bei Nebenschliessung eines einzelnen Elementes in der citirten Abhandlung erörtert, wo es sich eben nur um die Erklärung des Daniell'schen Versuches, nämlich der befremdenden Erscheinung eines bisweilen rückläufigen, ja sogar in seiner Richtung nach Massgabe des Widerstandes der Hauptschliessung veränderlichen Theilstromes handelte. Es ist also die weiter greifende Frage unerörtert: in welchen Relationen die Theilströme zu einander stehen, welche sich ergeben, wenn man die Nebenschliessung von einem Elemente der Reihe nach auf die folgenden überträgt, und was sich aus solchen Relationen bezüglich der Richtung oder des Nullwerdens der abgeleiteten Ströme deduciren lässt.

Diese Frage ist der Gegenstand der vorliegenden Abhandlung.

Ich will zunächst mit der Formulirung der Sätze beginnen, die sich mir bei näherer Betrachtung des Daniell'schen Versuches ergeben haben, und sofort die Beweise dafür folgen lassen.

Erstens. Wenn man die Intensitäten der bei der beschriebenen Übertragung einer Nebenschliessung abgeleiteten Ströme nach der Reihenfolge der betreffenden Elemente mit

$$s_1\ ,\ s_2\ ,\ s_3\ .\ .\ .\ .\ .\ s_n$$

bezeichnet, so gilt allgemein die Gleichung:

$$C_1\, s_1 + C_2\, s_2 + C_3\, s_3 + \ldots C_n\, s_n = 0,$$

wobei

$$C_1\ ,\ C_2\ ,\ C_3\ ,\ \ldots C_n$$

essentiell positive Functionen der vorhandenen Widerstände sind. Hieraus folgt, dass die besagten Theilströme niemals gleich gerichtet sein können, sondern, wenn sie nicht alle einzeln genommen gleich Null sind, immer theils positiv, theils negativ (rückläufig) sein müssen.

Zweitens. Wenn der Widerstand der von Element zu Element übertragenen Nebenschliessung nicht geändert wird und die Widerstände der Elemente unter sich gleich sind, wird

$$C_1 = C_2 = C_3 = \ldots C_n,$$

folglich

$$s_1 + s_2 + s_3 + \ldots + s_n = 0.$$

In diesem Falle findet also der Gegensatz der Richtungen jener Ströme in der Art Statt, dass ihre algebraische Summe Null ist.

Drittens. Wenn die einzelnen Ketten gleiche Widerstände haben und der Widerstand der Nebenschliessung ungeändert bleibt, findet auch noch die Relation Statt, dass sich die Differenzen der Theilströme zu einander gerade verhalten wie die Differenzen der elektromotorischen Kräfte von den betreffenden Elementen.

Die Beweise dieser Sätze ergeben sich am einfachsten, wenn man die bei successiver Nebenschliessung abgezweigten Theilströme in der Art ermittelt, dass man die von den einzelnen Stromquellen herrührenden, und nach den bekannten Gesetzen der linearen Stromverzweigung auf die angewendete Nebenschliessung entfallenden Componenten, nach Massgabe ihrer Richtungen algebraisch summirt.

Es seien n Elemente, welchen der Reihe nach die Spannungen

$$e_1\ ,\ e_2\ ,\ e_3\ ,\ \ldots .\ e_n$$

und die Widerstände

$$u_1\ ,\ u_2\ ,\ u_3\ ,\ \ldots .\ u_n$$

angehören, in geschlossener Säule gegeben und das erste mit einer Nebenschliessung vom Widerstande l behaftet[1]).

Ferner sei

$$e_1 + e_2 + e_3 + \ldots + e_n = E$$

und

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n = U.$$

Der Strom, welcher jetzt durch die Nebenschliessung geht, ist nun offenbar die Differenz zweier Componenten, deren eine von den

---

[1]) Denkt man sich die Elemente nicht unmittelbar, sondern durch Dräthe verbunden, und die Nebenschliessung an bestimmten Stellen dieser Zwischenleiter angelegt, so müssen natürlich die dadurch gebildeten Segmente der von der Nebenschliessung berührten Verbindungsdräthe, den Widerständen der Elemente, welchen sie angehören, zugerechnet werden.

$n-1$ Elementen ohne Nebenschliessung herrührt, die andere aber vom ersten Elemente geliefert wird.

Erstgenannte Componente ist ein auf den Leiter l des gespaltenen Schliessungskreises entfallender Stromarm vom Betrage

$$t_1 = \frac{(E-e_1)\, u_1}{U\,(u_1 + l) - u_1^{\,2}}\,;\ ^{1})$$

letztere dagegen ein diese Nebenschliessung l in entgegengesetzter Richtung durchlaufender Zweigstrom von der Stärke

$$z_1 = \frac{e_1\,(U - u_1)}{U\,(u_1 + l) - u_1^{\,2}}\ ^{2})\,;$$

---

[1]) Die $n-1$ Elemente geben vermöge ihrer elektromotorischen Kraft $E-e_1$ für den ganzen Querschnitt ihres aus $U-u_1$ und aus den Zweigen u_1 und l bestehenden Schliessungskreises den Strom

$$H_1 = \frac{E - e_1}{U - u_1 + \dfrac{u_1\, l}{u_1 + l}} = \frac{(E-e_1)\,(u_1 + l)}{U\,(u_1 + l) - u_1^{\,2}}$$

wovon auf u_1 der Theil

$$T_1 = \frac{(E - e_1)\, l}{U\,(u_1 + l) - u_1^{\,2}}$$

und auf l der Betrag

$$t_1 = \frac{(E - e_1)\, u_1}{U\,(u_1 + l) - u_1^{\,2}}$$

entfällt.

[2]) Das erste Element allein liefert für den ganzen Querschnitt seines aus u_1 und aus den Armen $U-u_1$ und l bestehend gedachten Schliessungskreises den Strom

$$h_1 = \frac{e_1}{u_1 + \dfrac{(U - u_1)\, l}{U - u_1 + l}} = \frac{e_1\,(U - u_1 + l)}{U\,(u_1 + l) - u_1^{\,2}},$$

wovon auf $U-u_1$ der Antheil

$$Z_1 = \frac{e_1\, l}{U\,(u_1 + l) - u_1^{\,2}}$$

und auf l der Antheil

$$z_1 = \frac{e_1\,(U - u_1)}{U\,(u_1 + l) - u_1^{\,2}}$$

kommt

folglich ist der gesuchte Theilstrom

$$t_1 - z_1 = s_1 = \frac{u_1 E - e_1 U}{U(u_1 + l) - u_1^2}\ ^{1)}.$$

Ganz analog sind, wenn man sich die Nebenschliessung nach und nach auf alle folgenden Elemente übertragen denkt, die entsprechenden Theilströme

$$s_2 = \frac{u_2 E - e_2 U}{U(u_2 + l) - u_2^2}$$

$$s_3 = \frac{u_3 E - e_3 U}{U(u_3 + l) - u_3^2}, \ldots . s_n = \frac{u_n E - e_n U}{U(u_n + l) - u_n^2}.$$

Hätte man auch den Widerstand der Nebenschliessung von Element zu Element ungleich, z. B. der Reihe nach

$$x_1, x_2, x_3, \ldots . x_n$$

gehabt, so hätten sich die Nenner

$$\begin{aligned} U(u_1 + x_1) - u_1^2 &= C_1 \\ U(u_2 + x_2) - u_2^2 &= C_2 \\ U(u_3 + x_3) - u_3^2 &= C_3 \\ \ldots\ldots\ldots & \\ U(u_n + x_n) - u_n^2 &= C_n \end{aligned}$$

ergeben und man hätte ganz allgemein erhalten

$$\begin{aligned} C_1 s_1 &= u_1 E - e_1 U \\ C_2 s_2 &= u_2 E - e_2 U \\ C_3 s_3 &= u_3 E - e_3 U \\ \ldots\ldots & \\ C_n s_n &= u_n E - e_n U. \end{aligned}$$

1) Der andere Theil des Hauptstromes, nämlich die im ersten Element herrschende Strömung ist offenbar

$$T_1 + h_1 = \sigma_1 = \frac{El + e_1(U - u_1)}{U(u_1 + l) - u_1^2}.$$

Natürlich muss

$$s_1 + \sigma_1 = H_1 + Z_1$$

gleich dem ganzen Hauptstrome sein, wovon man sich durch Substitution der betreffenden Werthe leicht überzeugt. Man findet für jede Summe den Ausdruck

$$\frac{E(u_1 + l) - e_1 u_1}{U(u_1 + l) - u_1^2}.$$

Addirt man diese Gleichungen, so erhält man mit Berücksichtigung der Werthe von E und U:

$$C_1 s_1 + C_2 s_2 + C_3 s_3 + \ldots + C_n s_n = 0.$$

Aus den früher angegebenen Werthen der Coëfficienten

$$C_1 \ , \ C_2 \ , \ C_3 \ \ldots \ C_n$$

ist leicht ersichtlich, dass dieselben nothwendig immer positiv sind. Diese Gleichung zeigt daher dass die Theilströme, wenn sie nicht alle einzeln genommen gleich Null sind, niemals gleich gerichtet sein können.

Denkt man sich die Nebenschliessung constant $= l$ und überdies

$$u_1 = u_2 = \ldots = u_n = u,$$

so werden

$$C_1 = C_2 = C_3 = \ldots . = C_n = nu\,(u + l) - u^2,$$

folglich

$$s_1 + s_2 + s_3 + \ldots + s_n = 0.$$

Die numerischen Werthe der Theilströme sind in diesem Falle nach geschehener Abkürzung

$$s_1 = \frac{E - ne_1}{(n-1)\,u + nl}$$

$$s_2 = \frac{E - ne_2}{(n-1)\,u + nl}$$

$$s_3 = \frac{E - ne_3}{(n-1)\,u + nl}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$s_n = \frac{E - ne_n}{(n-1)\,u + nl}$$

Setzt man den gemeinschaftlichen Nenner $= m$ und sucht die Differenzen

$$s_1 - s_2 \ , \ s_2 - s_3 \ , \ s_3 - s_4 \ \ldots \ s_{n-1} - s_n,$$

so findet man dafür der Reihe nach die Werthe

$$-\frac{n}{m}(e_1-e_2), -\frac{n}{m}(e_2-e_3), -\frac{n}{m}(e_3-e_4) \ldots -\frac{n}{m}(e_{n-1}-e_n)^{1});$$

eben so findet man allgemein, wenn α, β, γ, δ beliebige Stellenzeiger der auf einander folgenden Elemente sind:

$$s_\beta - s_\alpha = -\frac{n}{m}(e_\alpha - e_\beta), \; s_\gamma - e_\delta = -\frac{n}{m}(e_\gamma - e_\delta) \text{ etc.},$$

folglich

$$\frac{s_\alpha - s_\beta}{s_\gamma - s_\delta} = \frac{e_\alpha - e_\beta}{e_\gamma - e_\delta};$$

bei constanter Nebenschliessung also, und wenn die einzelnen Elemente gleiche Widerstände haben, ist die algebraische Summe der Theilströme Null, und ihre Differenzen verhalten sich zu einander wie die correspondirenden Differenzen der elektromotorischen Kräfte. Somit sind die oben aufgestellten drei Sätze bewiesen.

Aber auch die in der citirten Abhandlung Poggendorff's bereits enthaltenen Folgerungen fliessen noch einfacher aus den Gleichungen

$$s_1 = \frac{u_1 E - e_1 U}{U(u_1 + l) - u_1^2} \text{ u. s. w.}$$

Ich will hierauf nicht eingehen, sondern nur, um mögliche Zweifel auszuschliessen, das Nullwerden aller Theilströme noch etwas näher beleuchten.

In jener Abhandlung ist dies für den Fall behauptet, dass „sämmtliche Ketten einander vollkommen gleich“ sind.

Soll diese Bedingung hinreichend allgemein sein, so muss unter der „Gleichheit“ der Ketten die Gleichheit ihrer für den Schliessungswiderstand Null geltenden Stromstärken verstanden werden. Jeder Theilstrom wird nämlich gleich Null, wenn in allen Ketten dasselbe

1) Wenn daher bei gleichen Widerständen die elektromotorischen Kräfte in arithmetischer Reihe steigen, so müssen bei constanter Nebenschliessung die entsprechenden Theilströme in einer arithmetischen Reihe fallen, deren Summe Null ist. So entsprechen sich z. B. die Reihen 1, 2, 3, 4, 5, 6 und + 15, + 9, + 3, — 3, — 9, — 15.

Verhältniss zwischen Spannung und Widerstand besteht [1]), was aus den Formeln

$$s_1 = \frac{u_1 E - e_1 U}{U(u_1 + l) - u_1^2}$$

u. s. w. bequemer ersichtlich ist, als wenn man die Poggendorff-sche Gleichung

$$\lambda_1 = \frac{1}{R_1 l}\left(\frac{P_1}{Q_1} - \frac{e_1}{u_1}\right) = \frac{1}{R_1 l}\left(\frac{E - e_1}{U - u_1} - \frac{e_1}{u_1}\right)$$

auf die einzelnen Theilströme anwendet.

Die Ausdehnung der abgehandelten Gesetze für den Fall dass man die Nebenschliessung über mehrere Ketten sich erstrecken lässt, oder an Säulen anbringt, welche combinirte Ketten enthalten, ergibt sich von selbst wenn man sich die zusammengesetzten Ketten durch äquivalente einfache ersetzt denkt, wofür sich die entsprechenden Constanten aus den gegebenen, mit Rücksicht auf die Art der Verbindung, immer leicht berechnen lassen.

---

[1]) Es wird nämlich

$$s_1 = s_2 = s_3 = \ldots = s_n = 0,$$

wenn

$$\frac{e_1}{u_1} = \frac{e_2}{u_2} = \frac{e_3}{u_3} = \ldots = \frac{e_n}{u_n} = \frac{E}{U}$$

ist.